TMA660
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri F

Datum: 2007-10-24, kl. 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Jacob Sznajdman, tel. 0762-721860, besöker salen ca 15.00 och 17.00.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Lös för varje värde på λ och μ det linjära ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 + \ x_4 & = & 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + \ x_3 \ - x_4 & = & \mu \\ 3x_1 + 5x_2 + \qquad +x_4 & = & 1 \\ x_2 \qquad + 2x_4 & = & 5 \end{array}\right. . \quad (8p)$$

2. Givet de två punkterna $P\,(2,7,3)$ och $Q\,(-1,1,0)$, bestäm det plan/de plan som innehåller y-axeln och ligger på lika avstånd från P och Q. (7p)

3. Ekvationen

$$3z^5 + 4z^4 + 13z^3 + 13z^2 + 12z + 3 = 0$$

har en rent imaginär rot. Lös ekvationen. (8p)

4. Låt u och v vara vektorer sådana att $|u| = |v|$. Visa att $|\lambda u + \mu v| = |\mu u + \lambda v|$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ge en geometrisk tolkning. (6p)

5. Givet en kvadratisk matris kallas summan av dess diagonalelement för matrisens spår (på engelska trace) och betecknas $\operatorname{tr} A$, d.v.s.,

$$\operatorname{tr} A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

(a) Beräkna $\operatorname{tr} A$, om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}. \qquad (1p)$$

(b) Om A och B är kvadratiska matriser av samma typ, visa att $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$. (5p)

(c) För ett (och endast ett) av de tre matrisparen nedan gäller att det finns kvadratiska matriser C och D sådana att $A = CD$ och $B = DC$. Vilket? Motivera! (4p)

$$(1) \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 3 \\ -5 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -12 \\ -1 & 0 & -21 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 3 \\ -5 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -12 \\ -1 & 0 & -21 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(3) \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 3 \\ -5 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -12 \\ -1 & 0 & -21 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Låt $P_k\,(x_k, y_k),\ k = 1, 2, 3$, vara tre punkter i planet som inte ligger i linje. Visa att

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

är ekvationen för cirkeln som går genom $P_1, P_2.P_3$. (7p)

7. Visa att en kvadratisk matris är inverterbar om och endast om dess determinant är skild från noll. (8p)

8. Formulera och bevisa Cauchy-Schwarz olikhet. (6p)

/JM