Chalmers Tekniska Högskola
Institutionen för Teknisk Fysik
Mats Granath

Tentamen i Termodynamik och Statistisk fysik för F3(FTF140)

Tid och plats: Tisdag 18/8 2009, kl. 14.00-16.00 i V-huset.
Examinator: Mats Granath, 7723175, 0766229026, mats.granath@physics.gu.se
Hjälpmedel: BETA, Physics Handbook, Termodynamiska tabeller (utdelade), ett A4 blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Poäng från dugga och inlämningsuppgift kan ge maximalt 8 extra poäng. För godkänt krävs 30 poäng.
Rättningsgranskning: Hos examinatorn, rum O7109B. (Ingen bestämd tid, men det går också bra att boka en tid via email.)

Uppgift 1

En gas flödar genom en strypventil och expanderar. Efter strypventilen har gasens specifika entalpi minskat med 50J/kg. Om hastigheten på gasen i inflödet kan försummas beräkna hastigheten i utfödet. (10p)

Uppgift 2

Antag att ett kvantmekaniskt system har fyra tillgängliga tillstånd som har energier, 0,ϵ, ϵ, och 2ϵ. Systemet är i jämvikt med ett värmebad vid temperatur T.

a) Skriv ner det allmäna uttrycket för väntvärdet av systemets energi? (7p)

b) Beräkna väntevärdet av systemets energi i gränserna $T = 0$ och $T \to \infty$. Motivera kort från grundläggande principer svaren. (3p)

Uppgift 3

En mol syrgas (O_2) som kan betraktas som en ideal gas är i jämvikt i en cylinder vid ett tryck $P_i = 0.3MPa$ och temperatur $T_i = 300K$. (Se figur.) Gasen tillåts expandera mot ett yttre tryck $P_0 = 0.1MPa$ tills mekanisk jämvikt uppnås vid tryck $P_f = P_0$. Cylindern är isolerad så att expansionen kan anses vara adiabatisk.

a) Beräkna gasens ursprungsvolym V_i. (2p)

b) Beräkna gasens sluttemperatur T_f. (5p)

c) Beräkna ändringen i gasens entropi $\Delta S = S_f - S_i$. (3p)

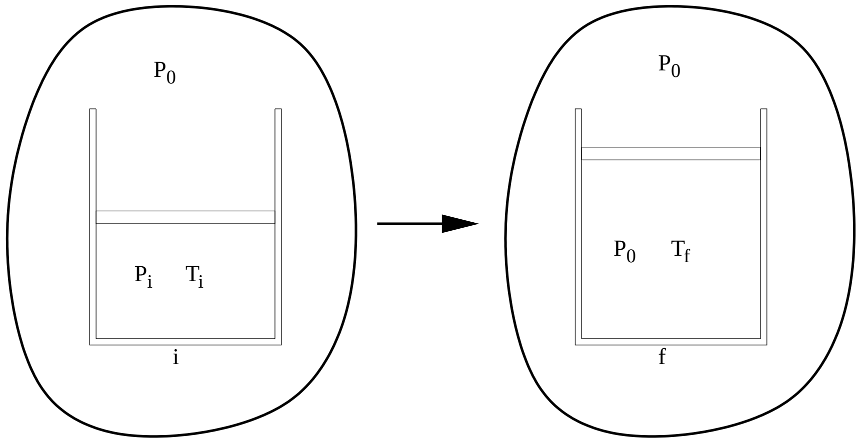

Figure 1: Uppgift 3

Uppgift 4

Vibrationerna runt jämviktsavståndet hos en diatomär molekyl kan beskrivas som en harmonisk oscillator i en dimension, med energinivåer $\epsilon_r = \hbar\omega(\frac{1}{2} + r)$ där kvanttalen r ”ar heltal $r \geq 0$ och ω är konstant.

a) Härled ett utryck för väntevärdet av vibrationsenergin $\bar{epsilon}$ då molekylen befinner sig i en gas vid temperatur T. (5p)

Klassiskt kan energin för en harmonisk oscillator skrivas $\epsilon_{kl.} = \frac{1}{2}m^*(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$ där x är avvikelsen från minimum av den harmoniska potentialen och m^* är molekylens reducerade massa.

b) För den klassiska oscillatorn gäller ekvipartitionsprincipen (lika fördelningslagen). Skriv ner väntevärdet av energin $\bar{\epsilon}_{kl.}$ vid temperatur T. (2p)

c) Den klassiska gränsen av ett kvantmekaniska systemet karakteriseras av att energinivåerna ligger tätt i förhållande till temperaturen. Visa att lösningen för energin i a) reduceras till lösningen för energin i b) i den klassiska gränsen. (3p)

Uppgift 5

En värmeisolerad behållare med totala volymen V innehåller $n_{O_2} = 0.2$mol syrgas och $n_{N_2} = 0.1$ mol kvävgas. De två gaserna är separerade med en rörlig värmeledande vägg så att gaserna är i jämvikt vid samma tryck (P_0) och temperatur (T_0). Gaserna kan beskrivas som ideala.

a) Beräkna P_0 givet totala volymen $V = 1\text{m}^3$ och $T_0 = 300$K. (2p)

Antag nu att den rörliga väggen tas bort plötsligt så att de båda gaserna kan blandas och

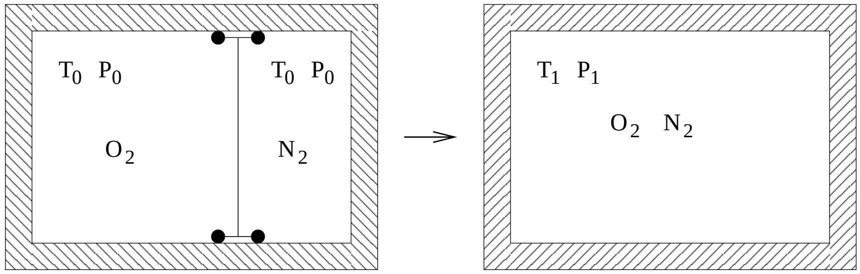

Figure 2: Uppgift 5

jämvikt uppnås för gasblandningen.

b) Vad är sluttemperaturen T_1? (2p)

c) Beräkna sluttrycket P_1. (För ideala gaser kan P_1 beräknas som en summa av de två gasernas partialtryck. Gasens partialtryck är trycket vid given temperatur och volym då man bortser från den andra gasen.) (3p)

d) Beräkna totala ändringen av systemets entropi $\Delta S = S_1 - S_0$. (3p)

Uppgift 6

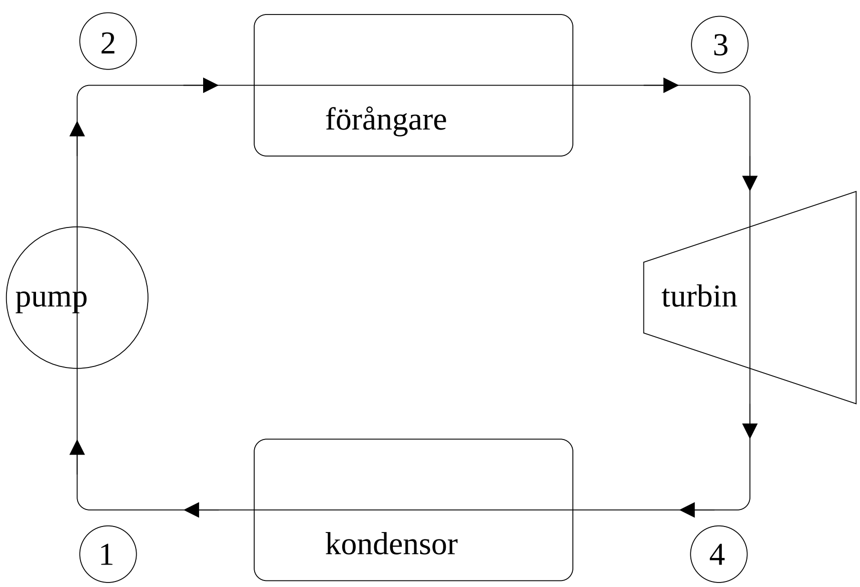

Figure 3: Uppgift 6

Skissen beskriver ett kraftvärmeverk där värme tillförs i förångaren och omsätts till arbete i turbinen. (En liten del av det utvunna arbetet går åt till att driva pumpen.)

Arbetsmediet är vatten och följande gäller för flödet: 1) mättad vätska vid $P_1 = 7.5$kPa, 2) komprimerad vätska vid P_2 =5MPa, 3) överhettad ånga vid $P_3 = P_2$, 4) mättad ånga (gas och vätska) vid $P_4 = P_1$. Pumpen och turbinen kan antas arbeta adiabatiskt och reversibelt. I förångaren tillförs 2750kJ värme per kg vatten.

a) Vad är temperaturen för den överhettade ångan, T_3? (2p)

b) Vad är ångans kvalitet (massandel gas) efter turbinen? (3p)

c) Vad är verkningsgraden för värmeverket? (3p)

d) Antag att flödet genom turbinen är adiabatisk men inte reversibelt. Hur påverkar detta svaren i deluppgift b och c? (2p)

Lösning Tenta 090818, Termodynamik och statistisk fysik, FTF140

Uppgift 1

1sta lagen för flöde $\dot{m}h_1 + \frac{1}{2}\dot{m}v_1^2 = \dot{m}h_2 + \frac{1}{2}\dot{m}v_2^2$ (där övriga termer saknas) ger (med $v_1 = 0$) $v_2 = 2(h_1 - h_2) = 100J/kg = 100(m/s)^2$ eller $v_2 = 10m/s$.

Uppgift 2

a) Enligt kanonisk fördelning fås $\bar{E} = (2\epsilon e^{-\beta\epsilon} + 2\epsilon e^{-\beta 2\epsilon})/Z$ där $Z = 1 + 2e^{-\beta\epsilon} + e^{-\beta 2\epsilon}$.

b) $T \to 0 \leftrightarrow \beta \to \infty$ vilket ger $\bar{E} \to 0$, vilket är rimligt eftersom vid $T = 0$ är systemet i sitt grundtillstånd (lägsta energi). (Enligt 3e satsen, $S = 0$.)

$T \to \infty \leftrightarrow \beta \to 0$ vilket ger $\bar{E} \to \epsilon$, vilket är rimligt eftersom vid $T \to \infty$ är systemets entropi maximal, dvs alla tillstånd är lika sannolika.

Uppgift 3

a) $V_i = \frac{RT_i}{P_i} = 8.31 \cdot 10^{-3} m^3 = 8.31\ell$

b) Adiabatisk, dvs. $đQ = 0$ ger $dE = đW$. Arbete på systemet från omgivningen $đW = -P_0 dV$ och för idealgas gäller $dE = C_v dT$, vilket ger $C_v(T_f - T_i) = -P_0(V_f - V_i)$. Med $V_f = \frac{RT_f}{P_f} = \frac{RT_f}{P_0}$ kan vi lösa ut $T_f = T_i(C_v + R(P_0/P_i))/(C_v + R) = [C_v = C_p - R] = T_i(C_p - 2R/3)/C_p = 0.81T_i = 243K$. Här har vi använt $C_p = \bar{C}_p/M = 29.4J/molK$ där $\bar{C}_p = 0.92J/gK$ (ur tabell) och molmassan $M = 32g/mol$.

c) Beräkna ΔS genom att anta kvasistatisk process: $đW = -PdV$ och $dS = \frac{đQ}{T} = \frac{dE - đW}{T} = C_v \frac{dT}{T} + P\frac{dV}{T} = C_v\frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V}$. Integrerat ger det $\Delta S = C_v \ln(T_f/T_i) + R\ln(V_f/V_i) = C_v \ln(0.81) + R\ln(3T_f/T_i) = C_p \ln(0.81) + R\ln(3) \approx 2.92J/K$

Uppgift 4

a) $Z = \sum_r e^{-\beta\hbar\omega(1/2+r)} = e^{-\beta\hbar\omega/2}/(1 - e^{-\beta\hbar\omega})$, $\bar{\epsilon} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta} = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$

b) $\bar{\epsilon_{kl.}} = 2\frac{1}{2}k_B T = k_B T$

c) Klassiska gränsen $\frac{\hbar\omega}{k_B T} \ll 1$. Använd $\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + ...$ för $x \ll 1$ vilket ger $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_{kl.}$.

Uppgift 5

a) Idealgas: $P_0 V_{O_2} = 0.2RT_0$ och $P_0 V_{N_2} = 0.1RT_0$ där volymerna är initiala volymerna för respektive gas så att $V_{O_2} = 2V_{N_2}$. Totala volymen är $V = V_{O_2} + V_{N_2}$ vilket ger $V_{N_2} = V/3$ och följaktligen $P_0 = 0.1RT_0/V_{N_2} = 0.3RT_0/V = 748Pa$.

b) $đQ = đW = 0$, dvs $\Delta E = 0$, inre energin är bevarad. För ideal gas gäller $E = E(T)$ ($dE = C_V dT$) och eftersom både gaserna börjar och slutar vid samma temperatur måste dennavara oförändrad. $T_1 = T_0 = 300K$.

c) $P_1 = P_{1,O_2} + P_{1,N_2} = 0.2RT_1/V + 0.1RT_1/V = 0.3RT_1/V = P_0$ (Rimligt eftersom vi har tryck- och temperaturjämvikt i initial tillståndet.)

d) P.S.S som i uppgift 3: för varje komponent $\Delta S = C_V \ln(T_f/T_i) + nR\ln(V_f/V_i) = nR\ln(V_f/V_i)$ alltså $\Delta S = 0.2R\ln(3/2) + 0.1R\ln(3) = 0.19J/K$

Uppgift 6

a) 1: mättad vätska 7.5MPa, 2: komprimerad vätska 5MPa, 3: överhettad gas 5Mpa, 4: gas och vätska 7.5MPa. Ta entropi och entalpivärden ur tabell.

a) 1-¿2, adiabatiskt och reversibelt, dvs $\Delta s = 0$. I 1) $s = 0.58kJ/kgK$, entalpi $h_1 = 169kJ/kg$. I 2) $s = 0.57kJ/kgK$ vid 40^{o}C (stämmer bra nog med s_1) och $h_2 = 172kJ/kg$. I 3 tillförs $q = 2922kJ/kg$ värme vilket ger entalpi $h_3 = 2922kJ/kg$. Vid 300^{0}C ser vi $h = 1925kJ/kg$ vilket stämmer väl. Alltså $T_3 = 300^0$C. Vi har också $s_3 = 6.31kJ/kgK$

b) I 3-4 gäller $\Delta s = 0$. I 4 $s_f = 0.58$, $s_g = 8.25$, $h_f = 169$ och $h_g = 2431$. Kvaliteten fås ur $xs_g + (1-x)s_f = s_3$ vilket ger $x = (s_3 - s_f)/(s_g - s_f) = 0.75$, dvs 75%. vi beräknar $h_4 = xh_g + (1-x)h_f = 1781kJ/kg$

c) Verkningsgraden är kvoten mellan nettoarbete och tillförd värme $\eta = \frac{(h_3-h_4)-(h_2-h_1)}{q_{in}} = 0.38$, dvs 38%.

d) För adiabatisk men ickereversibel process gäller $\Delta s > 0$ (från 2dra lagen $dS \geq đQ/T$, där = endast för reversibel process). Vi får alltså $s_4 > s_3$ vilket svarar mot $x > 0.75$ och följaktligen $h_4 > 1781$ vilket ger lägre verkningsgrad $\eta < 0.38$.