TMS125, Stokastiska Processer F2

Tentamen

Fredag 25/8, 2006. Eftermiddag. OBS 5 timmar.

Jour: Johan Tykesson (772 5360)

Hjälpmedel: Endast Beta.

Tentamen består av sex uppgifter, och varje uppgift är värd maximalt 5 poäng. Var noggranna och motivera alla steg! 15 poäng rätt ger minst en 3:a. Lycka till.

---

1. Låt ξ vara en stokastisk variabel som är likformigt fördelad på $[0,1]$, och η en stokastisk variabel som är likformigt fördelad på $[\xi, 1]$.
   (a) Motivera utan några beräkningar vilket tecken som $\mathbf{Cov}(\xi, \eta)$ borde ha.
   (b) Beräkna $\mathbf{E}[\eta]$ och den gemensamma täthetsfunktionen $f_{\eta\xi}(x, y)$.
   (c) Beräkna $\mathbf{Cov}(\xi, \eta)$.
2. Låt $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ vara en svagt stationär process. Låt $Y(t) = X(t+1) - X(t)$. Beräkna kovariansfunktionen fär $Y(t)$ och visa att $Y(t)$ är svagt stationär.
3. Låt $N(t)$ vara en Poisson process med intensitet λ. Är $N(t) - \lambda t$ kontinuerlig i kvadratiskt medel?
4. Låt $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ vara en Markov kedja på tillståndsrummet $\{0,1,2,3\}$ med övergångsmatris:
$$P = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$
   (a) Vad finns det för begränsingar på α, β, γ, och $\delta\cdot$
   (b) Om kedjan börjar i tillstånd 0 (dvs $X_0 = 0$), vad är sannolikheten att $X_2 = 3$?
   (c) Om kedjan börjar i tillstånd 0, vad är sannolikheten att den någonsin kommer till tillstånd 3?
5. Två pumpar används parallelt i en fabrik. För att fabriken ska fungera krävs det att åtminstone en av pumparna fungerar. När pumparna är trasiga repareras de, men bara en åt gången. Både tiden tills när pumparna går sönder, och reparationstiden är exponential-fördelad (så systemet kan ses som en tidskontinuerlig Markov kedja).

   Varje pump går sönder med intensitet 0.004 pumpar/timme, och pumpar repareras med takten 0.1 pumpar/timme. Dessutom sker med intensitet 0.002 händelser/timme olyckor (jordbävningar!) som gör att alla fungerande pumpar går sönder.

   I längden (d.v.s. i det stationära tillståndet) hur stor del av tiden är fabriken trasig p.g.a. av pumparna?
6. Låt $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ vara en standard Wienerprocess. Låt ξ vara en stokastisk variabel som bekriver tiden då $W(t)$ först antar värdet 1 eller -1. Visa att $\mathbf{E}[\xi] < \infty$ (dvs hitta en övre gräns för $\mathbf{E}[\xi]$ som inte är oändligheten).

   Ledning: Dela upp tiden i intervall.

TMS125, Stokastiska Processer F2, VT 2005
Tenta 2006-08-25 FACIT

---

1. (a) $\mathbf{Cov}(\xi, \eta)$ borde vara positiv, eftersom ett större värde på ξ medför ett större förväntat värde på η.

   (b)

$$\begin{aligned} E[\eta] &= \int_0^1 E[\eta \mid \xi = x] f_\xi(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1+x}{2} \\ &= (1/2) + (1/4) = 3/4 \end{aligned}$$

   Täthetsfunktionen ges av:

$$f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{om } y \geq x \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

   (c)

$$\begin{aligned} E[\xi\eta] &= \int_0^1 \int_0^1 xy f_{\xi\eta}(x, y) dx dy \\ &= \int_0^1 x \int_x^1 \frac{y}{1-x} dy dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{1-x} \int_x^1 y dy dx \\ &= (1/2) \int_0^1 x(1+x) dx \\ &= (1/2)(1/2 + 1/3) = 5/12 \end{aligned}$$

   Det följer att $\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = E[\xi\eta] - E[\xi]E[\eta] = 5/12 - (1/2)(3/4) = 1/24$.

2.

$$\begin{aligned} r_Y(\tau) &= \mathbf{Cov}(Y(t+\tau), Y(t)) \\ &= \mathbf{Cov}(X(t+\tau+1) - X(t+\tau), X(t+1) - X(t)) \\ &= \mathbf{Cov}(X(t+\tau+1), X(t+1)) - \mathbf{Cov}(X(t+\tau), X(t+1)) \\ &\quad - \mathbf{Cov}(X(t+\tau+1), X(t)) + \mathbf{Cov}(X(t+\tau), X(t)) \\ &= 2r_X(\tau) - r_X(\tau-1) - r_x(\tau+1) \end{aligned}$$

Eftersom $\mathbf{Cov}(Y(t+\tau), Y(t))$ inte beror på t (och $\mathbf{E}[Y(t)] = 0$) är $Y(t)$ en svagt stationär process.

3. Vi vet att $\mathbf{E}[N(t)^2] = \mathbf{Var}(N(t)) + \mathbf{E}[N(t)]^2 = \lambda t + \lambda^2 t^2 < \infty$. Utöver detta får vi:

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left[(N(t) - \lambda t - N(t_0) + \lambda t_0)^2\right] \\
= \; & \mathbf{E}\left[(N(t) - N(t_0))^2\right] - 2\lambda(t - t_0)\mathbf{E}[N(t) - N(t_0)] + \lambda^2(t - t_0)^2
\end{aligned}
$$

De senare två termerna $\to 0$ då $t \to t_0$. För den första gäller:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[(N(t) - N(t_0))^2\right] &= \mathbf{E}[N(t)^2] - 2\mathbf{E}[N(t)N(t_0)] + \mathbf{E}[N(t_0)^2] \\
&= \mathbf{E}[N(t)^2] + 2\mathbf{E}\left[N(t)(N(t) - N(t_0))\right] - 2\mathbf{E}[N(t)^2] \\
&\quad\; - \mathbf{E}[N(t_0)^2] \\
&= \lambda t_0 + \lambda^2 t_0^2 - \lambda t + \lambda^2 t_2 + 2\lambda^2 t(t - t_0) \\
&= \lambda(t - t_0) + \lambda^2(t^2 - t_0^2) + 2\lambda^2 t(t - t_0) \\
&\to 0
\end{aligned}
$$

då $t \to t_0$.

4. (a) $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$, och $\delta + \gamma = \beta$.

   (b) $\beta\delta$.

   (c) Någon gång måste vara den första som kedjan besöker tillstånd 2 eller 3. Om den då besöker tillstånd 2, som är absorberande, kommer den aldrig att nå tillstånd 3. Om den i stället besöker tillstånd 3 har vi situationen vi vill ha. Den betingade sannolikheten att gå från tillstånd 1 till 3, givet att den går från 1 till 2 *eller* 3 är $\delta/(\gamma + \delta)$.

5. Om vi låter tillståndet vara antal trasiga pumpar, så har kedjan generator:

$$
G = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.008 & 0.002 \\ 0.1 & -0.106 & 0.006 \\ 0 & 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}.
$$

Genom den vanliga metoden kan vi lösa ut den stationär fördelningen:

$$
\frac{1}{1.126}\,[10.10.026]
$$

6. Vi börjar med att dela upp intervallet $[0, \infty)$ i intervall av typen $I_i = [i - 1, i]$ för $i = 1, \ldots$. Låt A_i vara händelsen att $|W(i) - W(i+1)| > 2$. Om A_i inträffar så vet vi att $\xi \leq i$, och $\Pr(A_i) \approx 0.5$. Eftersom wienerprocessen har oberoende ökningar är alla A_i oberoende av varandra. Låt η vara det första i så att A_i inträffar - då är η geometriskt fördelad, och det gäller alltid att $\xi \leq \eta$. Från detta följer att $\mathbf{E}[\xi] \leq \mathbf{E}[\eta] < \infty$.